

Gebundene Teilchen und Streuprobleme in der Quantenfeldtheorie

Von ERNST FREESE

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen
(Z. Naturforsch. 8a, 776—790 [1953]; eingegangen am 23. Juli 1953)

Es wird gezeigt, wie man alle im Rahmen einer gewählten Quantenfeldtheorie denkbaren physikalischen Prozesse mit Hilfe von „Wellenfunktionen“ beschreiben und die experimentell beobachtbaren Größen im Prinzip aus deren Differential- bzw. Integralgleichungen berechnen kann. Der Zusammenhang mit der Dysonschen *S*-Matrix wird abgeleitet.

Die neueren Ergebnisse von Tomonaga¹, Schwinger², Feynman³ und Dyson⁴, die durch eine formal relativistisch invariante Behandlung der Streuprobleme freier Teilchen die auftretenden Divergenzen als Renormierungsgrößen für Massen und Kopplungskonstanten deuten konnten, lassen vermuten, daß man auch alle anderen, im Rahmen einer gewählten Quantenfeldtheorie möglichen physikalischen Prozesse durch einen geeignet gewählten mathematischen Formalismus beschreiben kann. Dieser Formalismus wird durch die Erweiterung der gewöhnlichen Wellenfunktionen einzelner Teilchen auf neu definierte „Wellenfunktionen“ für ein unendliches System miteinander wechselwirkender „Teilchen“ geliefert. Als erste haben Landau und Peierls⁵ eine solche Konfigurationsraummethode für die unrelativistische Quantenfeldtheorie vorgeschlagen. Von Salpeter und Bethe⁶ wurde mit Hilfe des Feynmanschen Graphenformalismus eine Integralgleichung für eine Wellenfunktion von 2 Teilchen abgeleitet und von Gell-Mann und Low⁷ näher begründet. Gell-Mann und Goldberger⁸ schrieben, ebenfalls durch die Feynmanschen Graphen angeregt, vermutungsweise Integralgleichungen für die einfachsten Wellenfunktionen hin, konnten aber keine konsequente Ableitung aus der Operator-Feldtheorie geben und so auch die allgemeinen Differentialgleichungen bzw. Integralgleichungen nicht ausrechnen. Die vorliegende Arbeit sucht diese Fragen zu klären.

Um zunächst einen Zusammenhang mit der üblichen *S*-Matrixrechnung in der Wechselwirkungs-

darstellung zu erhalten, wird in Kapitel I die Übergangsamplitude in die Heisenberg-Darstellung transformiert und dann durch das asymptotische Verhalten von „Wellenfunktionen“ ausgedrückt. In Kapitel II werden die Grundeigenschaften dieser Funktionen angegeben, in Kapitel III ihre Differentialgleichungen und in Kapitel IV ihre Integralgleichungen. In Kapitel V findet man den Zusammenhang zwischen dieser Konfigurationsraummethode und der Operator-Feldtheorie. Durch das unendliche Gleichungssystem für die Wellenfunktionen werden alle im Rahmen der benutzten Quantenfeldtheorie möglichen physikalischen Prozesse im Prinzip beschrieben. Das Hauptproblem bei der praktischen Rechnung besteht allerdings darin, die geeigneten Näherungen zu finden. Die Renormierung kann bei schwacher Kopplung im wesentlichen auf die übliche Weise durchgeführt werden; bei starker Kopplung ist sie noch nicht bekannt. Es ist ein großer Vorteil dieser Formulierung, daß man Differentialgleichungen für gewöhnliche Funktionen hat und den Zusammenhang mit der Operator-Mathematik vergessen darf.

Beweise werden wegen Platzersparnis meist nur angedeutet. Die ausführliche Darstellung findet sich in meiner Dissertation⁹.

I. Übergangsamplitude und Wellenfunktionen

Um einen natürlichen Zugang zu den „Wellenfunktionen“ der Quantenfeldtheorie zu erhalten, wollen wir zeigen, wie man die sonst mit Hilfe der

¹ S. Tomonaga, Progr. theor. Physics 1, 27 [1946].

² J. Schwinger, Physic. Rev. 74, 1439 [1948]; 75, 651 [1949]; 76, 790 [1949]; 82, 664 [1951]; Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 452 [1951].

³ R. P. Feynman, Physic. Rev. 76, 749, 769 [1949].

⁴ F. J. Dyson, Physic. Rev. 75, 486, 1736 [1949]; 82, 429 [1951] u. folgende Arbeiten.

⁵ Landau u. Peierls, Z. Physik 62, 188 [1930].

⁶ E. E. Salpeter u. H. A. Bethe, Physic. Rev. 84, 1232 [1951].

⁷ M. Gell-Mann u. F. Low, Physic. Rev. 84, 350 [1951].

⁸ M. Gell-Mann u. M. L. Goldberger, Physic. Rev. 87, 350 [1952].

⁹ E. Freese, Dissertation Göttingen, März 1953. Die Methode wird an den einfachsten Wellenfunktionen der Quantenelektrodynamik in einer anderen Arbeit erläutert, die in den Acta physica austriaca erscheint.



Dysonschen *S*-Matrix berechneten Übergangsamplituden für die Streuung von „freien“ Teilchen aneinander und ihren Übergang in andere freie Teilchen durch das asymptotische Verhalten solcher Wellenfunktionen ausdrücken kann.

1. Die Übergangsamplitude in der Wechselwirkungsdarstellung

Die Wechselwirkungsdarstellung (Index *w*) wird bekanntlich^{2,10} so eingeführt, daß die Feldoperatoren $O_w(x)$ ($= A_w$ bzw. ψ_w) den wechselwirkungsfreien Feldgleichungen genügen, während die Zustandsvektoren $\Psi_w(t)$ sich auf Grund der Wechselwirkung zeitlich ändern. (Ein etwa vorhandenes *zeitlich konstantes* äußeres Feld wollen wir nicht als Wechselwirkung bezeichnen, sondern mit in die Definition der „freien Teilchen“ hineinnehmen: $\psi_w(x)$ genügt also der Gleichung

$$\{p - e A^e(x) - m\} \psi_w(x) = 0.$$

Als erstes führt man nun den Hilbert-Raum der Zustände Ψ_f ein, die freie Teilchen beschreiben. (Dieser hat zunächst nichts mit demjenigen des Gesamtproblems zu tun.) Die dazu nötigen Gedankengänge sollen skizziert werden, damit später mit den entsprechenden Vektoren der Heisenberg-Darstellung (Index *H*) verglichen werden kann: Man entwickelt die Operatoren $\mathcal{O}_w(x)$ nach den „Eigenfunktionen“ der wechselwirkungsfreien Differentialgleichungen (DGen) und zerlegt nach positiven und negativen Frequenzen:

$$O_w = O_w^{(+)} + O_w^{(-)}. \quad (1)$$

[Bei zeitlich konstantem äußeren Feld ist das möglich (s. Furry¹¹.)] Mit Hilfe dieser Operatoren kann man formal Energie-, Ladungs- und Teilchenzahl-Operatoren für freie Teilchen aufzeigen und ihre Vertauschungsrelationen mit den O_w , $O_w^{(+)}$ und $O_w^{(-)}$ angeben. Daraus folgt, daß die $O_w^{(+)}$ Vernichtungsoperatoren und die $O_w^{(-)}$ Erzeugungsoperatoren von freien Teilchen positiver Energie sind. Den Vakuumvektor Ψ_f^0 definiert man als Eigenzustand kleinster Energie:

$$H_w^0 \Psi_f^0 = 0. \quad (2)$$

(Wir wollen dabei voraussetzen, daß H_w^0 als Wickisches *S*-Produkt¹² geschrieben ist, d. h. alle Erzeu-

gungsoperatoren stehen links von den Vernichtungsoperatoren.)

Mit dieser Forderung gleichbedeutend ist

$$O_w^{(+)}(x) \Psi_f^0 = 0. \quad (3)$$

Aus diesem Vakuumvektor kann mit Hilfe der Teilchen-Erzeugungsoperatoren $O_w^{(-)}$ auf bekannte Weise ein orthonormiertes System von Vektoren φ_f aufgebaut werden, welches alle möglichen Zustände mit beliebig vielen freien Teilchen beschreibt^{13,14}. Wegen dieser Möglichkeit, Zustände mit freien Teilchen zu definieren, wurde bisher die Wechselwirkungsdarstellung bevorzugt. Wir werden jedoch sehen, daß man auch in der Heisenberg-Darstellung eine ähnliche Formulierung finden kann, die außerdem den Vorteil hat, nicht nur zur Behandlung der Streuung freier Teilchen aneinander, sondern auch für gebundene Teilchen geeignet zu sein.

Zur Berechnung von Übergangsamplituden für die Streuung von freien Teilchen aneinander setzt man voraus, daß $\Psi_w(t)$ für $t \rightarrow -\infty$ (bzw. $\rightarrow +\infty$) nur einlaufende (bzw. auslaufende) freie Teilchen beschreiben soll, d. h. $\Psi_w(-\infty)$ [bzw. $\Psi_w(+\infty)$] soll einem der eben eingeführten Zustände Ψ_f mit freien Teilchen entsprechen. Wir wollen dafür schreiben:

$$\begin{aligned} \Psi_w(-\infty) &\rightsquigarrow \Psi_f \\ \text{bzw. } \Psi_w(+\infty) &\rightsquigarrow \Psi_f'. \end{aligned} \quad (4)$$

(Man ordnet damit den „Hyperbelbahnen“ der Streuteilchen ebene Wellen zu.)

Ein solcher Grenzübergang $t \rightarrow \pm \infty$ ist natürlich nur sinnvoll, wenn $\Psi_w(t)$ dabei einem konstanten Vektor zustrebt und sich z. B. nicht noch periodisch ändert. Wie man schon an der Einteilchengleichung zeigen kann, ist diese Forderung nur erfüllt, wenn

1. für $t \rightarrow \pm \infty$ nur freie, aber keine gebundenen Teilchen vorhanden sind, und wenn

2. die Theorie renormiert ist; d. h. die Wechselwirkung zwischen den beiden Feldern muß so beschaffen sein, daß die in den freien Teilchengleichungen (z. B. der Dirac-Gleichung) stehenden Massen gleich den experimentell beobachtbaren Massen der freien Teilchen sind und sich nicht durch die Wechselwirkung ändern. Da wir uns hier vor allem für die prinzipielle Behandlung von gebundenen und gemischten Problemen interessieren, wollen wir die einfachere Form der nicht renormierten Theorie benutzen und doch bei allen grundlegenden Ableitungen so tun, als wäre sie

¹³ R. Becker u. G. Leibfried, Physic. Rev. **76**, 1739 [1949].

¹⁴ K. O. Friedrichs, Commun. pure appl. Math. IV, Nr. 2/3 [1951].

¹⁰ W. Pauli, Ausgewählte Kapitel aus der Feldquantisierung (Vorlesungsausarbeitung).

¹¹ W. H. Furry, Physic. Rev. **81**, 115 [1951].

¹² G. C. Wick, Physic. Rev. **80**, 268 [1950].

renormiert. Führt man nämlich irgendeine näherungsweise Rechnung durch, so kann man die zu einer Renormierung führenden Glieder relativistisch invariant von den anderen abtrennen und sie dann fortlassen; im Effekt kommt das einer von vornherein renormierten Theorie gleich.

Aus dem Anfangszustand $\Psi_w(-\infty)$ entsteht im Laufe großer Zeiten ein Endzustand, der aus $\Psi_w(-\infty)$ durch Anwendung eines Operators S gebildet werden müßte. Ein solcher Operator konnte bisher noch nicht relativistisch invariant formuliert werden; seine Matrixelemente würden die Heisenbergsche S -Matrix bilden¹⁵ und alle möglichen Übergänge in freie wie gebundene Teilchen beschreiben. Statt dessen wurde von Dyson⁴ ein Operator S , die Dysonsche S -Matrix, gefunden, mit dessen Hilfe es wenigstens möglich ist, die Übergangswahrscheinlichkeit von freien in freie Teilchen zu berechnen. Für den Endzustand erhält man damit:

$$\Psi_w(+\infty) = S \Psi_w(-\infty) \rightsquigarrow S \Psi_f \quad (5)$$

(Schreibweise von S s. l. c.^{2,12}).

Die Messungen nach erfolgter Streuung werden relativ zu dem für $t = +\infty$ vorhandenen Vakuum $\Psi_w^0(+\infty) \rightsquigarrow \Psi_f^0$ gemacht, aus dem alle möglichen Zustände mit freien Teilchen

$$\Psi'_w(+\infty) \rightsquigarrow \Psi'_f$$

wieder durch Anwendung der Operatoren $O_w^{(-)}$ erzeugt werden. Die Übergangsamplitude in einen solchen Zustand heißt also:

$$\begin{aligned} U &= (\Psi'_w(+\infty), \Psi_w(+\infty)) \\ &= (\Psi'_w(+\infty), S \Psi_w(-\infty)) \rightsquigarrow (\Psi'_f, S \Psi_f). \end{aligned} \quad (6)$$

Sie soll jetzt durch das asymptotische Verhalten von „Wellenfunktionen“ ausgedrückt werden. Um das Prinzip zu erkennen, betrachten wir einen Endzustand mit 2 freien Teilchen. (Für ein Teilchen treten einige Schwierigkeiten noch nicht auf.)

$$\begin{aligned} \Psi'_w(+\infty) &= \iint \psi_w^{(+)}(1) \psi_w^{(+)}(2) d^3 x_1 d^3 x_2 \\ &\quad \cdot \chi(1) \chi(2) \Psi_w^0(+\infty) \end{aligned}$$

$(\psi_w^{(+)} \dagger = \psi_w^{(-)})$ = Erzeugungsoperator für ein Nukleon in der Wechselwirkungsdarstellung; χ = Wellenfunktion für ein freies Nukleon).

Es werden zwei *verschiedene* Teilchen angenommen, damit bei der prinzipiellen Betrachtung das Pauli-Prinzip nicht stört. Die Definition ist unab-

hängig von den Zeiten t_1 und t_2 . (Man kann z. B. beide $= +\infty$ wählen.) Ψ'_w sei normiert auf 1.

Für diesen speziellen Endzustand kann man die Übergangsamplitude in der Form

$$U = \int \chi^*(1) \chi^*(2) d^3 x_1 d^3 x_2 \varphi_{\text{out}}(|12|) \quad (7)$$

schreiben, wobei

$$\varphi_{\text{out}}(|12|) = (\Psi_w^0(\infty), \psi_w^{(+)}(1) \psi_w^{(+)}(2) S \Psi_w(-\infty))$$

ist. Auf dieselbe Weise lassen sich alle möglichen Übergangsamplituden angeben.

2. Umrechnung von φ_{out} in die Heisenberg-Darstellung, Einführung der Wellenfunktionen

Die Wechselwirkungsdarstellung zeichnet die freien Teilchen ganz besonders aus und ist daher vorwiegend zur Behandlung der Streuung freier Teilchen geeignet. Für allgemeinere Fragestellungen, z. B. für gebundene Teilchen, bildet dagegen die Heisenberg-Darstellung den natürlichen Ausgangspunkt. Wir werden daher φ_{out} in die Heisenberg-Darstellung umschreiben und von da aus die Möglichkeit für die allgemeine Einführung der Wellenfunktionen haben.

Der Zusammenhang zwischen Heisenberg- und Wechselwirkungsdarstellung wird durch den unitären Operator $U(0, t) = U^\dagger(t, 0)$ vermittelt. Für $t \rightarrow -\infty$ wird

$$\Psi_H^S = U(0, -\infty) \Psi_w(-\infty) \rightsquigarrow U(0, -\infty) \Psi_f. \quad (8)$$

[Dabei ist $U(0, -\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} U(0, t)$ nur für den Unterraum definiert, der durch die Operatoren $\Psi_w(-\infty)$ aufgespannt wird, d. h. für freie einlaufende Teilchen. Für gebundene Teilchen dagegen oszilliert $U(0, t)$ ebenso wie $\Psi_w(t)$.] Diese Vektoren Ψ_H^S sollen Heisenberg-Streuzustände genannt werden, und insbesondere der Zustand

$$\Psi_H^0 = U(0, -\infty) \Psi_w^0(-\infty) \rightsquigarrow U(0, -\infty) \Psi_f^0 \quad (9)$$

das Heisenberg-Vakuum (bezogen auf einlaufende Teilchen). Weshalb die Zustände diese Bezeichnung verdienen, werden wir sogleich sehen.

Ebenso folgt ein Zusammenhang für die gestrichenen Vektoren, welche auslaufende freie Teilchen beschreiben; insbesondere für das Heisenberg-Vakuum der auslaufenden Teilchen:

$$\Psi_H^0 = U^\dagger(\infty, 0) \Psi_w^0(+\infty) \rightsquigarrow U^\dagger(\infty, 0) \Psi_f^0. \quad (10)$$

¹⁵ W. Heisenberg, Z. Naturforschg. 1, 11 [1946] u. frühere Arbeiten.

(Für ein abgeschlossenes System sind die beiden Vakua praktisch identisch; sie unterscheiden sich nur um den unwesentlichen Phasenfaktor:

$$(\Psi_H^0, \Psi_H^0) \rightsquigarrow (\Psi_f^0, S\Psi_f^0).$$

Für ein zeitlich veränderliches äußeres Feld [bzw. äußeren Strom] dagegen werden aus dem bei $t = -\infty$ vorhandenen Vakuum reelle Teilchen erzeugt, d. h. $| < S >_0 | < 1$.)

Da vorausgesetzt wurde, daß für $t \rightarrow -\infty$ (bzw. $+\infty$) nur freie Teilchen vorhanden sind, geht die Wirkung der Operatoren $O_H(x)$ bei einem solchen Grenzübergang in diejenige von $O_{in}(x)$ (bzw. $O_{out}(x)$) über. (Wir setzen hier die Kenntnis der Arbeit von Yang und Feldman¹⁶ voraus. Für gebundene Teilchen muß man vorsichtig mit diesen Gleichungen umgehen. Darauf wird im Kapitel IV hingewiesen.) Aus der bekannten Beziehung zwischen O_w und O_H ¹⁰ folgt für $t \rightarrow -\infty$ bzw. $+\infty$

$$\begin{aligned} O_w(x) &= U^+(0, -\infty) O_{in}(x) U(0, -\infty), \\ O_w(x) &= U(\infty, 0) O_{out}(x) U^+(\infty, 0), \end{aligned} \quad (11)$$

und diese Beziehungen gelten für alle Zeiten, weil alle diese Operatoren $O(x)$ den wechselwirkungsfreien Feldgleichungen genügen. (Wegen der Gültigkeitsbeschränkung der Gln. (11) s. ^{9,17}.)

Mit Hilfe der Beziehung (11) können wir einsehen, weshalb die eben eingeführten Heisenberg-Zustände ihren Namen verdienen: Die Operatoren O_{in} (bzw. O_{out}) haben auf die Zustände Ψ_H^S (bzw. Ψ_H^S) dieselbe Wirkung, wie die Operatoren O_w auf die freien Teilchenzustände Ψ_f . Z. B. ist

$$(\Psi_f^0, O_w(x) \Psi_f) = (\Psi_H^0, O_{in}(x) \Psi_H^S).$$

Insbesondere können wir O_{in} wieder nach positiven und negativen Frequenzen zerlegen.

Dann ist $O_{in}^{(+)}(x)$ der Vernichtungs- und $O_{in}^{(-)}(x)$ der Erzeugungsooperator für ein von $t = -\infty$ her einlaufendes, freies Streuteilchen. Die Bezeichnung „Heisenberg-Vakuum“ für Ψ_H^0 ist ebenfalls gerechtfertigt, denn

$$O_{in}^{(+)}(x) \Psi_H^0 = 0. \quad (12)$$

(Im Gegensatz zu der analogen Gl. (3) ist das Heisenberg-Vakuum durch diese Gleichung allein noch nicht bestimmt, sondern erst durch die Forderung des kleinsten Energieeigenwertes, s. Kap. V.)

Für ein abgeschlossenes System sind die Heisenberg-Streuzustände auch Eigenvektoren aller Erhaltungs-

größen der Heisenberg-Darstellung und geben die gewünschten Eigenwerte. Für eine renormierte Theorie gelten nämlich die Gleichungen (Ableitung 1. c. ¹⁷, S. 361);

$$\begin{aligned} H_H U(0, -\infty) &= U(0, -\infty) H_w^0, \\ \vec{P}_H U(0, -\infty) &= U(0, -\infty) \vec{P}_w. \end{aligned} \quad (13)$$

Dieselbe Gleichung wie für den Gesamtimpuls \vec{P} gilt auch für die Ladung und den Drehimpuls. Das heißt aber: Die konstanten Heisenberg-Operatoren geben, angewandt auf die Heisenberg-Streuzustände, dieselben Eigenwerte wie die entsprechenden konstanten Wechselwirkungsoperatoren in bezug auf die Freien-Teilchen-Zustände. Z. B. ist

$$H_H \Psi_H^S = U(0, -\infty) H_w^0 \Psi_f = E \Psi_H^S, \quad (14)$$

wobei E die Gesamtenergie der freien Teilchen ist. Insbesondere wird also tatsächlich

$$P_H^v \Psi_H^0 = 0, \quad Q_H \Psi_H^0 = 0.$$

Die gleichen Aussagen gelten auch für die gestrichenen Heisenberg-Vektoren.

Jetzt können wir φ_{out} in die Heisenberg-Darstellung umrechnen. Die Dysonsche S -Matrix ist gegeben durch:

$$S = U(\infty, 0) U(0, -\infty). \quad (15)$$

Benutzt man noch die Beziehung:

$$U^\dagger(\infty, 0) U(\infty, 0) = 1, \quad (16)$$

so folgt durch Umrechnen von (8):

$$\begin{aligned} \varphi_{out}(|12|) &= (\Psi_H^0, \varphi_{out}^{(+)}(1) \varphi_{out}^{(+)}(2) \Psi_H^S) \\ &= (\Psi_H^0, : \varphi_{out}(1) \varphi_{out}(2) : \Psi_H^S) \end{aligned} \quad (17)$$

Die Doppelpunkte bedeuten das Wicksche S -Produkt¹² (d. h. alle Operatoren O_{out} werden nach positiven und negativen Frequenzen zerlegt, und die Reihenfolge der Operatoren in der entstehenden Summe so umgeordnet, daß immer die $O_{out}^{(-)}$ links von den $O_{out}^{(+)}$ stehen. Vor jedem Glied steht jeweils das Vorzeichen der zur Umordnung nötigen Permutation von Spinoren). Die beiden Zeilen in der letzten Gleichung sind gleich, weil hier jedes Matrixelement des S -Produkts, in dem ein Operator $O_{out}^{(-)}$ auftritt, verschwindet.

$\varphi_{out}(|12|)$ kann man als das asymptotische Verhalten einer Funktion $\varphi(|12|)$ für $t_1, t_2 \rightarrow +\infty$ ansehen, die man erhält, wenn in φ_{out} die Operatoren O_{out} durch die Heisenberg-Feldoperatoren $O_H(x)$ ersetzt werden. Das Wicksche S -Produkt hat dann zwar in seiner ursprünglichen Bedeutung als Zer-

¹⁶ C. N. Yang u. D. Feldman, Physic. Rev. **79**, 972 [1950].

¹⁷ W. Glaser u. W. Zimmermann, Z. Physik **134**, [1952].

legung nach positiven und negativen Frequenzen keinen Sinn mehr, weil eine solche für die Heisenberg-Operatoren nicht relativistisch invariant und für alle Zeiten identisch möglich ist; in der Arbeit von Wick¹² ist aber implizit enthalten, wie man ein *S*-Produkt in eine Summe von *T*-Produkten zerlegen kann, die noch sog. „Kontraktionen“ enthal-

ten. Da die Vorschrift der Zeitordnung im *T*-Produkt auch für Heisenberg-Operatoren noch sinnvoll ist, soll ein *S*-Produkt für Heisenberg-Operatoren immer durch eine solche Zerlegung nach *T*-Produkten definiert sein. Damit werden dann alle möglichen, zur Berechnung von Übergangssamplituden benötigten Funktionen

$$\varphi_{\text{out}}(x_1 \dots x_l | y_1 \dots y_m | z_1 \dots z_n) = (l! m! n!)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\Psi_{\text{H}}^0, : A_{\text{out}}(x_1) \dots \psi_{\text{out}}(y_1) \dots \psi'_{\text{out}}(z_1) \dots \psi'_{\text{out}}(z_n) : \Psi_{\text{H}}^S)$$

durch das asymptotische Verhalten (für $t_i \rightarrow \infty$) der „Wellenfunktionen“

$$\varphi(x_1 \dots x_l | y_1 \dots y_m | z_1 \dots z_n) = (l! m! n!)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\Psi_{\text{H}}^0, : A_{\text{H}}(x_1) \dots \psi_{\text{H}}(y_1) \dots \psi'_{\text{H}}(z_1) \dots \psi'_{\text{H}}(z_n) : \Psi_{\text{H}}^S) \quad (18)$$

bestimmt.

Die Zahlenfaktoren sind zur Definition der entsprechenden Freien-Teilchen-Wellenfunktionen nötig. Um sie nicht unnötig mitschleppen zu müssen, führen wir für die reinen Matrixelemente der *S*-Produkte die *Funktionen* σ ein, haben also zwischen ihnen und den Wellenfunktionen die Beziehung:

$$\varphi = (l! m! n!)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sigma. \quad (18a)$$

Um hier eine völlige Symmetrie zwischen Teilchen- und Antiteilchen zu erhalten, wurden für erstere die Operatoren ψ , für letztere die ladungskonjugierten Operatoren

$$\psi' = C \bar{\psi}^T \quad (19)$$

benutzt. (Bekanntlich ist

$$C \gamma_\nu^T = -\gamma_\nu C \text{ mit } \gamma_\nu = \{\beta, \beta \vec{\alpha}\}, \quad C^\dagger C = 1,$$

und man kann $C^T C^{-1} = -1$ wählen. Bei der üblichen Darstellung der γ -Matrizen genügt z. B. $C = i\alpha_2$ allen Forderungen. Genaueres siehe z. B. Pais und Jost¹⁸.)

Die Umrechnung der *S*- auf die *T*-Produkte kann durch Umkehr der bei Wick angegebenen Beziehung zwischen *T*- und *S*-Produkten erhalten werden. Die der Definition (18) entsprechenden Matrixelemente der *T*-Produkte wollen wir τ -*Funktionen* nennen. Schreibt man dann die Summe über alle möglichen σ - bzw. τ -Funktionen (mit einer bestimmten Koordinatenzahl), welche k Kontraktionen enthalten, in der Form $\sigma(\dots)_k$ bzw. $\tau(\dots)_k$, so heißt die Wick-sche Relation:

$$\tau(\dots)_0 = \sigma(\dots)_0 + \sigma(\dots)_1 + \dots,$$

und die hier gebrauchte Umkehrung wird:

$$\sigma(\dots)_0 = \tau(\dots)_0 - \tau(\dots)_1 + \dots \quad (20)$$

(Beweis s. ⁹).

Welche Form der Kontraktion zwischen je 2 Operatoren hat man nun zu nehmen? Für freie Felder ist

$$\begin{aligned} A_w^*(1) A_w^*(2) &= (\Psi_f^0, T A_w(1) A_w(2) \Psi_f^0) \\ &= -i \Delta_+(1-2), \\ \psi_w^*(1) \psi_w^*(2) &= (\Psi_f^0, T \psi_w(1) \psi_w'(2) \Psi_f^0) \\ &= +i S_+(1, 2) C^T. \end{aligned} \quad (21)$$

Dabei ist $\Delta_+ = \Delta + \frac{i}{2} \Delta^{(1)}$ $\left. \begin{array}{l} \text{rechts stehen die} \\ \text{bekannten Funk-} \\ \text{tionen (s. 2, 10)} \end{array} \right\}$

(ohne äußeres FslD ist auch S_+ nur von den Differenzen der Koordinaten abhängig).

In der Heisenberg-Darstellung kann man für die Kontraktionen entweder die Vakuumerwartungswerte der *T*-Produkte nehmen, d. h. die renormierten Δ'_+ , S'_+ Funktionen, oder einfach wieder die Δ_+ , S_+ Funktionen selbst. Die erste Definition ist an sich konsequenter, weil man für die Fortpflanzungsfunktionen Δ , S die Verschmierung durch Bildung virtueller Mesonen und Paare mitberücksichtigt (s. Heisenberg¹⁹). Da aber eine explizite Form dieser gestrichenen Funktionen nicht bekannt ist, sondern erst näherungsweise ausgerechnet werden muß, wollen wir die ungestrichenen Funktionen benutzen. Dann haben wir wenigstens den Vorteil, die DGes und Integralgleichungen (IGes) der Wellenfunktionen auf einfache Weisen und ganz allgemein hinschreiben zu können.

¹⁸ A. Pais u. R. Jost, Physic. Rev. 87, 871 [1952].

¹⁹ W. Heisenberg, Zur Quantisierung nicht linearer Gleichungen. Erscheint demnächst.

3. Berechnung der Übergangsamplituden aus Wellenfunktionen (für Endzustände mit freien Teilchen)

Hat man für ein bestimmtes physikalisches Streuproblem die von $t = -\infty$ her einlaufenden Teilchen vorgegeben, so wird das Verhalten der Wellenfunktionen für endliche Zeiten durch ihre DGen bzw. IGen bestimmt, die in Kap. III und IV abgeleitet werden. Aus dem asymptotischen Wellenfunktionsverhalten für $t \rightarrow +\infty$ folgen dann die Übergangsamplituden für Streuprobleme. Während die mathematische Behandlung des ebenfalls möglichen Übergangs in gebundene Teilchen noch nicht geklärt ist (vgl. Normierung in Kap. II), läßt sich

$$U = \int \bar{\chi}(x_1 \dots | y_1 \dots | z_1 \dots) i \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{t_{x_1}} d^3 x_1 \dots \beta d^3 y_1 \dots \beta d^3 z_1 \dots \varphi_{\text{out}}(x_1 \dots | y_1 \dots | z_1 \dots). \quad (24)$$

Im Impulsraum geht das in die bekannte Form über.

In den uns vor allem interessierenden Fällen, in denen die gestreuten Teilchen andere Impulse als die ursprünglich vorhandenen haben, brauchen wir nicht erst das asymptotische Verhalten φ_{out} der Wellenfunktionen φ zu bestimmen; man kann die Integrale über die dreidimensionalen Hyperflächen auch als Oberflächenintegrale im 4-dimensionalen Raum auffassen. Die Beiträge, die von den Flächen $t_i = -\infty$ herrühren, fallen dann automatisch fort, wenn alle Wellenfunktionen der freien Teilchen im Endzustand Ψ_f orthogonal auf denen im Anfangszustand Ψ_i sind (d. h. für ebene Wellen andere Impulse haben, bzw. bei Teilchenerzeugung oder -vernichtung überhaupt nicht auftreten).

Dann wird:

$$U = \int \partial_{t_{x_1}} \dots \partial_{t_{y_1}} \dots \partial_{t_{z_1}} \dots \chi(x_1 \dots | y_1 \dots | z_1 \dots) i \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{t_{x_1}} \dots \beta \dots \beta \dots \varphi(x_1 \dots | y_1 \dots | z_1 \dots) d^4 x_1 \dots d^4 y_1 \dots d^4 z_1 \dots$$

Weil die Wellenfunktion χ freier Teilchen bezüglich der verschiedenen Koordinaten den wechselwirkungsfreien Feldgleichungen genügt, kann man das umformen in:

$$U = \int \bar{\chi}(x_1 \dots | y_1 \dots | z_1 \dots) \frac{1}{i} \text{Kl}_{x_1} \frac{1}{i} \text{Kl}_{x_2} \dots \frac{1}{i} \text{Di}_{y_1} \dots \frac{1}{i} \text{Di}_{z_1} \dots \varphi(x_1 \dots | y_1 \dots | z_1 \dots) d^4 x_1 \dots d^4 y_1 \dots d^4 z_1 \dots \quad (25)$$

Die hier auftretenden Differentialoperatoren

$$\text{Kl} = \square - \mu^2,$$

$$\text{Di} = \mathbf{p} - m = i\beta \partial_t + i\beta \vec{\alpha} \vec{\nabla} - m$$

lassen sich für freie einlaufende Teilchen sehr einfach handhaben. Iteriert man nämlich bei der nähungsweisen Berechnung von φ nach den einlaufenden ebenen Wellen, so treten für jede Koordinate von φ Δ_+ bzw. S_+ Funktionen auf, deren Differentiation gerade δ -Funktionen liefert.

Im allgemeinen wird das Integral (25), so wie es hingeschrieben wurde, gar nicht existieren; wenn nämlich der Integrand für $t_i \rightarrow +\infty$ oder $-\infty$ peri-

die Übergangsamplitude in freie Teilchen leicht bestimmen. — Berücksichtigt man, daß die Normierung eines freien Mesons *positiver* Energie gegeben ist durch

$$\int \mathcal{A}^*(x) i \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{t_x} d^3 x \mathcal{A}(x) = 1$$

$$\left(\overset{\leftrightarrow}{\partial}_t = \overset{\rightarrow}{\partial}_t + \overset{\leftarrow}{\partial}_t, \text{ wobei } \mathcal{A}^* \overset{\leftarrow}{\partial}_t = -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}^* \text{ ist} \right), \quad (22)$$

und die eines freien Nukleons oder Antinukleons durch

$$\int \bar{\chi}(x) \beta d^3 x \chi(x) = 1, \quad (23)$$

so erhält man analog (8) für den Übergang in eine Wellenfunktion freier Teilchen $\chi(x_1 \dots | y_1 \dots | z_1 \dots)$ die Übergangsamplitude:

$$U = \int \bar{\chi}(x_1 \dots | y_1 \dots | z_1 \dots) i \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{t_{x_1}} d^3 x_1 \dots \beta d^3 y_1 \dots \beta d^3 z_1 \dots \varphi_{\text{out}}(x_1 \dots | y_1 \dots | z_1 \dots). \quad (24)$$

odisch ist. Hier hilft das allgemein übliche Einführen eines Konvergenzfaktors $e^{-\varepsilon |t_i|}$, dessen Meinung es ist, daß ε nach Ausführung der Integration gegen 0 gehen soll. Nur die Oberflächen $t_i = \pm \infty$, für die der Integrand einem konstanten Wert zustrebt, geben dann einen Beitrag, die anderen Oberflächen liefern Null. Z. B. gibt der Teil von φ , der den Übergang in gebundene Teilchen beschreibt, keinen Beitrag zu (25).

Um zu verstehen, weshalb die zunächst sehr abstrakt erscheinenden φ -Funktionen Wellenfunktionen genannt wurden, betrachten wir nun ihre Eigenschaften.

II. Die Eigenschaften der Wellenfunktionen

1. Zusammenhang mit den Wellenfunktionen der freien Teilchen

Bei verschwindender Kopplungskonstante [d. h. $O_H(x) \rightarrow O_w(x)$] gehen die φ in die üblichen Wellenfunktionen χ von mehreren freien Teilchen über. Außerdem hat φ im Gegensatz zur τ -Funktion an den Stellen, an denen 2 Zeitparameter gleich werden, keine Sprungstelle, die von den gleichzeitigen Vertauschungsrelationen der Operatoren herrühren (weil das S -Produkt für O_w Operatoren diese Eigenschaft hat und für O_w und O_H Operatoren auf gleiche Weise in die T -Produkte zerlegt wird.)* Dies ist jedoch keine Aussage über das analytische Verhalten der φ -Funktionen: Sie sind im allgemeinen auf dem zu 2 Koordinaten gehörenden Lichtkegel δ -funktionsartig singulär.

2. Symmetrie-Eigenschaft

$\varphi(x \dots | y \dots | z \dots)$ ist symmetrisch in den Bosonenkoordinaten und jeweils antimetrisch in den Nukleonen- und Antinukleonenkoordinaten. Die S - und T -Produkte haben nämlich dies Verhalten bei einer Vertauschung der entsprechenden Operatoren.

3. Periodizität in den Schwerpunktskoordinaten

Ist kein äußeres Feld vorhanden, so ist der Operator des Gesamt-4-Impulses eine Erhaltungsgröße und gibt mit irgendwelchen Feldoperatoren die Vertauschungsrelationen

$$i \frac{\partial}{\partial x^r} O_H(x) = [O_H(x), P_r]_-.$$

Ist φ ein Matrixelement, in welchem links das Heisenberg-Vakuum und rechts ein Eigenzustand zum Gesamt-4-Impuls steht, so wird

$$\begin{aligned} i \sum \left\{ \frac{\partial}{\partial x^r} + \frac{\partial}{\partial y^r} + \frac{\partial}{\partial z^r} \right\} \varphi(x \dots | y \dots | z \dots) \\ = (P'_r - P_r^0) \varphi(x \dots | y \dots | z \dots), \quad (26) \end{aligned}$$

wobei P_r^0 der Eigenwert des 4-Impulses im Vakuum gleich Null und P'_r der Eigenwert des 4-Impulses für den betrachteten Heisenberg-Zustand ist.

Führt man Schwerpunktskoordinaten ein:

$$X^r = \Sigma (\alpha x^r + \beta y^r + \gamma z^r),$$

* Den Hinweis auf diese Eigenschaft verdanke ich Herrn Zimmermann, der mit ihrer Hilfe die Funktionen φ axiomatisch eingeführt und sie darum Wellenfunktionen genannt hat. Meine ursprüngliche, durch

wobei die Σ über alle in φ auftretenden Koordinaten läuft und

$$\Sigma (\alpha + \beta + \gamma) = 1$$

ist, so wird

$$\varphi(x \dots | y \dots | z \dots) \sim e^{-i P' r X^r}. \quad (27)$$

Aus dieser Periodizitätseigenschaft kann man insbesondere die Ruhenergie $\sqrt{P^2}$ eines gebundenen Systems bestimmen. (Die Koeffizienten α, β, γ wird man im allgemeinen so festlegen, daß für die Raumkoordinaten die übliche Schwerpunktsdefinition herauskommt.)

Ist ein zeitlich konstantes, äußeres Potential vorhanden, so ist nur noch die Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße, und man bekommt nur eine Periodizität bezüglich der Schwerpunktszeit.

4. Erhaltung von Ladung bzw. Nukleonenzahl

Während des Vorganges der Wechselwirkung ist es auch experimentell nicht möglich, die Zahl der vorhandenen Nukleonen und Mesonen anzugeben, wohl aber bleibt nach aller Erfahrung die *elektrische Ladung* bzw. die *Nukleonenzahl* (= Zahl der Nukleonen minus Zahl der Antinukleonen) erhalten. Diese Erfahrung drückt sich in der Quantenfeldtheorie durch die Erhaltung eines Ladungsoperators Q aus. — Sind die Wellenfunktionen Matrixelemente von Eigenzuständen der Ladung bzw. der Nukleonenzahl, so folgt aus den Vertauschungsrelationen mit dem Ladungsoperator, daß nur diejenigen Wellenfunktionen $\neq 0$ sind, die entsprechend vielen Operatoren ψ und $\bar{\psi}$ enthalten: Im Fall von ungeladenen Mesonen ist z. B. der Operator der Ladung $Q \sim \int \text{Sp} \{ [\bar{\psi}, \psi]_- \beta d^3x \}$. Aus den Vertauschungsrelationen

$$[Q, \psi]_- = -\psi, \quad [Q, \bar{\psi}] = +\bar{\psi}$$

folgt dann, daß für einen Heisenberg-Zustand mit der Nukleonenzahl r nur die Wellenfunktionen, die r Nukleonen, sowie beliebig viele (z. B. n) Paare und Mesonen (z. B. m) enthalten

$$\varphi(x_1 \dots x_m | y_1 \dots y_n y_{n+1} \dots y_{n+r} | z_1 \dots z_n) \neq 0 \quad (m, n \text{ beliebig}) \quad (28)$$

sein können. Die Matrixelemente aller anderen Operatoren, d. h. alle anderen Wellenfunktionen sind Null.

die Berechnung von Übergangsamplituden nahelegte Bezeichnung „Amplitudenfunktion“ ist für gebundene Teilchen unpassend.

5. Orthonormierung

Für die Wellenfunktionen einzelner freier Teilchen folgt aus ihren DGen, daß die Ausdrücke (22) und (23) zeitunabhängig sind, auch wenn links und rechts verschiedene Lösungen der entsprechenden Freien-Teilchen-Gleichungen stehen. Diese Ausdrücke benutzt man in der gewöhnlichen Quantentheorie, um das innere Produkt für einen Hilbertschen Funktionenraum zu definieren und bestimmt dann für jede der vorkommenden DGen ein orthogonales und normiertes Funktionensystem. (Zur δ -Funktionsnormierung s. Friedrichs¹⁴.) Dasselbe kann man für eine Funktion $\chi(x \dots | y \dots | z \dots)$ von mehreren freien Teilchen bezüglich jeder einzelnen Teilchenkoordinate machen.

Auch für die allgemeinen Wellenfunktionen der Quantenfeldtheorie muß man aus ihren DGen Ausdrücke ableiten können, die zeitlich konstant sind; weil verschiedene Wellenfunktionen durch ihre DGen miteinander verknüpft werden, kann ein solcher Ausdruck aber nicht mehr für eine einzige, sondern nur noch für die Gesamtheit aller zu einem physikalischen Problem gehörenden Wellenfunktionen gefunden werden. Durch ihn wäre das innere Produkt für einen Satz von Funktionen in einem erweiterten Hilbert-Raum definiert, die zu einem physikalischen Zustand gehörenden Funktionen wären normierbar und die zu verschiedenen Zuständen gehörenden Funktionen orthogonal. — Bei Kenntnis dieser Orthonormierung kann man ähnlich wie im vorigen Abschnitt für freie Teilchen auch die Übergangsamplituden in gebundene Teilchen bestimmen. Die Forderung der Unitarität für die Heisenbergsche *S*-Matrix ist identisch mit der Forderung, daß der Satz der das ganze Problem beschreibenden Wellenfunktionen auf 1 normiert ist.

Gehört ein Satz von Wellenfunktionen zu einem gebundenen Teilchen, so haben die Relativkoordinaten keine physikalische Bedeutung mehr. Sie treten nur auf, weil man ein „Elementarteilchen“ aus zwei Sorten von Ausgangs-Elementarteilchen zusammengesetzt annimmt und dann als „gebundenes Teilchen“ bezeichnet. Man wird also erwarten, daß es nur einen in den Schwerpunkts-, nicht aber in den Relativkoordinaten zeitunabhängigen Ausdruck gibt. Um einen solchen zu finden, hat man zwei Möglichkeiten. Entweder man setzt alle Relativkoordinaten gleich Null, nachdem man (unter Einführung von $A(x)$ als weiterer Koordinate) nach der Schwerpunktszeit differenziert hat; damit geht

man wieder zum einzeitigen Formalismus über und verzichtet auf formale relativistische Invarianz. Oder man sucht einen Ausdruck, in dem alle Relativzeit-Koordinaten wegintegriert werden.

Folgende Anhaltspunkte zum Auffinden einer Orthonormierung hat man:

1. Alle Ausdrücke müssen auch bei verschwindender Kopplungskonstante richtig bleiben, d. h. in Null oder in Normierungsausdrücke für Freie-Teilchen-Wellenfunktionen übergehen.

2. Die aus der Orthonormierung folgenden Ausdrücke für die Übergangsamplituden in beliebige Teilchen müssen für den Übergang in freie Teilchen wieder die Form (24) bzw. (25) haben. (Man erhält die Übergangsamplitude, indem man die Wellenfunktionen für große T nach einem dem betrachteten Streuproblem angepaßten orthonormierten System von Wellenfunktionen entwickelt, die voneinander unabhängige Teilchen beschreiben.)

Es ist mir nicht gelungen, eine solche Orthonormierung zu finden. Anscheinend gibt es für die hier eingeführten Wellenfunktionen gar keine, weil die Theorie noch nicht renormiert ist: Ist eine Normierung auf 1 möglich, so kommen natürlich alle Übergangsamplituden (für freie oder gebundene Teilchen) automatisch endlich heraus. Die Möglichkeit einer endlichen Orthonormierung ist also wahrscheinlich ein Maß dafür, ob die Theorie vernünftig ist, bzw. ob die Wellenfunktionen richtig gewählt wurden. Ihre Kenntnis ist auch darum besonders wichtig, weil sie gestattet, ein Minimalprinzip zur Berechnung kleinster Energiedifferenzen zu finden und so durch geeignete Ansätze für die Wellenfunktionen (z. B. Produktansatz) eine relativistisch invariante, starke Kopplungstheorie durchzuführen.

III. Die Differentialgleichungen der Wellenfunktionen

Um die Wellenfunktionen bei gegebenen Anfangsbedingungen berechnen zu können, braucht man ihre DGen. Hier kann nur der Weg für deren Ableitung aufgezeigt werden, zur genaueren Ausführung s. ⁹. Man bestimmt zunächst die DGen der τ -Funktionen. Diese τ -Funktionen sind unstetig, denn wenn ein Zeitparameter stetig durch den Wert eines anderen hindurchgeht, wird an der Durchgangsstelle die Reihenfolge der Operatoren im T -Produkt umgekehrt, man erhält also einen Sprung. Ebenso wie die Differentiation der unstetigen $\varepsilon(x)$ -Funktion [$\varepsilon(x) = \pm 1$ für $x \geq 0$] für die Unstetigkeitsstelle eine δ -Funktion liefert, ergibt die Differentiation einer τ -Funktion an den Unstetigkeitsstellen des Zeitparameters, nach dem differenziert wird, Beiträge, die jeweils von den Vertauschungsrelationen zweier Heisenberg-Feldoperatoren zu gleichen Zei-

ten herrühren. (Gerade an dieser Stelle müssen auch in einer nicht-lokalen Theorie die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen bekannt sein!) In unserem Fall sind die Vertauschungsrelationen zu gleichen Zeiten durch δ -Funktionen gegeben.

Da die Umrechnung der φ - in die τ -Funktionen bekannt ist (s. Kap. I. 2), kann man die DGen der φ -Funktionen angeben. Um eine einfache Schreibweise zu bekommen, wollen wir vorher folgende Vereinbarung treffen: Die für S - und T -Produkte definierten (+Funktions-) Kontraktionen sollen ebenso auch für ihre Matrixelemente, d. h. die σ - und τ -Funktionen, benutzt werden: Die Kontraktion zwischen zwei Operatoren wird wieder durch Punkte angegeben, die *oben* rechts neben den entsprechenden Koordinaten stehen. Steht statt des 2. Punktes ein Strich über einer Reihe von Koordinaten, so ist damit die Summe aller Funktionen gemeint, in denen eine dieser Koordinaten mit der mit Punkt versehenen Koordinate kontrahiert wird. Z. B. heißt:

$$\begin{aligned} \sigma(|y^*| \bar{z}_1 z_2) &= \sigma(|y^*| \bar{z}_1 z_2) + \sigma(|y^*| z_1 \bar{z}_2) \\ &= i S_+(y, z_1) C^T \sigma(|z_2|) - i S_+(y, z_2) C^T \sigma(|z_1|), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 ||) &= \sigma(x_1 \bar{x}_2 x_3 ||) + \sigma(x_1 x_2 \bar{x}_3 ||) \\ &= -i \Delta_+(x_1 - x_2) \sigma(x_3 ||) - i \Delta_+(x_2 - x_3) \sigma(x_1 ||). \end{aligned} \quad (32)$$

Damit erhält man für die pseudokalare Mesontheorie die DGen:

$$\begin{aligned} (p_{y_m} - m) \sigma(x_1 \dots x_l | y_1 \dots y_m | z_1 \dots z_n) &= \gamma'_5 \{ \sigma(x_1 \dots x_l y_m | y_1 \dots y_m | z_1 \dots z_n) \\ &\quad + \sigma(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_l y_m | y_1 \dots y_m | z_1 \dots z_n) \\ &\quad + \sigma(x_1 \dots x_l y_m | y_1 \dots y_m | \bar{z}_1 \dots \bar{z}_n) \\ &\quad - \sigma(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_l y_m | y_1 \dots y_m | \bar{z}_1 \dots \bar{z}_n) \}. \end{aligned} \quad (33)$$

Mit Hilfe der daneben stehenden Graphen lassen sie sich leicht merken. — Die Differentiation nach einer anderen Fermionen-Koordinate y_i liefert eine analoge Gleichung: Als zusätzliche Bosonen-Koordi-

nate tritt y_i auf und die Kontraktions-Punkte stehen jeweils an einem der beiden y_i .

Ebenso erhält man für die Differentiation nach einer Antiteilchen- und einer Bosonenkoordinate:

$$\begin{aligned} (p_{z_i} - m) \sigma(x_1 \dots x_l | y_1 \dots y_m | z_1 \dots z_n) &= \gamma'_t \{ \sigma(x_1 \dots x_l z_1 | y_1 \dots y_m | z_1 \dots z_n) \\ &\quad + \sigma(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_l z_1 | y_1 \dots y_m | z_1 \dots z_n) \\ &\quad + \sigma(x_1 \dots x_l z_1 | \bar{y}_1 \dots \bar{y}_m | z_1 \dots z_n) \\ &\quad - \sigma(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_l z_1 | \bar{y}_1 \dots \bar{y}_m | z_1 \dots z_n) \}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} (\square_{x_i} - \mu^2) \sigma(x_1 x_2 \dots x_l | y_1 \dots y_m | z_1 \dots z_n) &= -C^* \gamma'_5 \{ \sigma(x_2 \dots x_l | y_1 \dots y_m x_1 | \\ &\quad x_1 z_1 \dots z_n) \\ &\quad + \sigma(x_2 \dots x_l | \bar{y}_1 \dots \bar{y}_m x_1 | \bar{x}_1 z_1 \dots z_n) \\ &\quad + \sigma(x_2 \dots x_l | y_1 \dots y_m \bar{x}_1 | x_1 \bar{z}_1 \dots \bar{z}_n) \\ &\quad - \sigma(x_2 \dots x_l | \bar{y}_1 \dots \bar{y}_m \bar{x}_1 | x_1 \bar{z}_1 \dots \bar{z}_n) \}. \end{aligned} \quad (35)$$

Die letzte Kontraktion

$$\psi(x_1) \psi'(x_1) = i S_+(x_1, x_1) C^T$$

gibt nur bei Vorhandensein eines äußeren Feldes einen Beitrag ± 0 .

In der Quantenelektrodynamik steht statt γ'_5 :

$$\text{in Gl. (33)} + e \gamma_\nu, \quad (34) - e \gamma_\nu, \quad (35) + e \gamma^\nu.$$

Man sieht, daß durch solche DGen jeweils eine Wellenfunktion mit einer oder mehreren anderen Wellenfunktionen verkoppelt ist. Indem man jede dieser Wellenfunktionen nach jeder Koordinate differenziert, erhält man ein System von unendlich vielen hyperbolischen DGen. Hieraus könnte man

die Wellenfunktionen berechnen, wenn es möglich wäre, für jede auftretende Zeitkoordinate die Anfangsbedingung auf einer raumartigen Fläche festzulegen. Für Streuprobleme mit „freien“ Teilchen könnte man zu einer bestimmten Zeit alle Teilchen als räumlich voneinander getrennte Wellenpakete vorgeben, es ist aber formal einfacher, mit ebenen (oder Kugel-) Wellen, die von $t = -\infty$ her einlaufen, zu rechnen. Für gebundene Teilchen soll die Wellenfunktion φ erst bestimmt werden, man kann sie also nicht schon zu einer endlichen Zeit als bekannt voraussetzen, sondern höchstens fordern, daß von $t = -\infty$ her keine freien Teilchen einlaufen. Alle diese Probleme lassen sich durch ein den DGen entsprechendes unendliches System von IGen beschreiben: Für gebundene stationäre Probleme hat sogar nur dieses System einen Sinn, denn einem gebundenen Teilchen kann man physikalisch nur eine Zeit (hier die Schwerpunktszeit) zuordnen, während alle anderen in der Theorie auftretenden Zeiten mathematische Hilfsgrößen sind.

IV. Die Integralgleichungen der Wellenfunktionen

Die Wellenfunktionen der Quantenfeldtheorie stellen eine Erweiterung derjenigen einzelner freier Teilchen auf ein System von unendlich vielen miteinander wechselwirkenden „Teilchen“ dar. Viele Züge der allgemeinen Theorie kann man daher schon studieren an der

1. Integralgleichung für ein Elektron im äußeren Feld.

Aus der Dirac-Gleichung

$$(\mathbf{p} - m)\varphi(x) = e \mathbf{A}^e(x)\varphi(x) \quad (36)$$

folgt eine IG mit endlichen zeitlichen Integrationsgrenzen, wenn man den linksstehenden Differentialoperator mit Hilfe der üblichen Greenschen Umformung auf die rechte Seite bringt. Man erhält eine IG (s. Yang-Feldman¹⁶), deren inhomogenes Glied die Lösung eindeutig bestimmt, weil es die ganze Anfangsbedingung auf einer raumartigen Fläche enthält. Da man, insbesondere für ein gebundenes Teilchen, die Anfangsbedingung aber nicht kennt, nützt diese IG nichts und man geht statt dessen zu einer IG mit unendlichen Integrationsgrenzen über. Es ist aber nicht richtig, die zeitlichen Integrationsgrenzen ohne weiteres durch $-\infty$ bzw. $+\infty$ zu ersetzen, denn der Integrand ist im allge-

meinen eine periodische Funktion. Damit alle Gleichungen einwandfrei werden, soll der übliche Konvergenzfaktor benutzt und zunächst ein Zwischenglied der Greenschen Umformung hingeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{i} \int_{-\infty}^t e^{-\varepsilon|t-t'|} \frac{\partial}{\partial t'} S(x-x') \beta \varphi(x') d^4 x' \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|t-t'|} S_{\text{ret}}(x-x') e \mathbf{A}^e(x') \varphi(x') d^4 x'. \end{aligned} \quad (37)$$

Rechts wurde das Integral bis $+\infty$ erstreckt und dafür S_{ret} geschrieben. Offenbar können wir das Integral auf der linken Seite nicht mehr ohne weiteres in das Oberflächenintegral zu den Zeiten t und $-\infty$ zerlegen: Der Konvergenzfaktor bewirkt, daß diejenigen Teile von $S \varphi$, die für $t' \rightarrow -\infty$ periodisch sind, fortfallen. — Indem man die Fourier-Darstellung von S und φ benutzt, kann man zeigen, daß die linke Seite von (37)

$$\varphi(x) - \varphi_{\text{in}}(x) \quad (38)$$

ergibt. Dabei ist (siehe Anhang):

a) $\varphi_{\text{in}} = 0$, wenn φ die Wellenfunktion eines gebundenen Teilchens darstellt.

b) $\varphi_{\text{in}}(x)$ gleich der einlaufenden ebenen (bzw. Kugel-)Welle für ein Streuproblem, wenn man dafür den üblichen Ansatz macht:

$$\varphi(x) = \varphi_{\text{in}}(x) + f(x),$$

$f(x)$ soll die auslaufende Streuwelle beschreiben. Das inhomogene Glied der IG ist also nur dann $\neq 0$, wenn die Fourier-Koeffizienten von φ an einer bestimmten Stelle des Impulsraum-Hyperboloids $p^2 = m^2$ singulär werden.

Für Streuansätze mit einlaufenden ebenen (bzw. Kugel-) Wellen erhalten wir damit die inhomogene IG:

$$\varphi(x) = \varphi_{\text{in}}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ret}}(x-x') e \mathbf{A}^e(x') \varphi(x') d^4 x', \quad (40)$$

für alle anderen Probleme aber die homogene IG:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ret}}(x-x') e \mathbf{A}^e(x') \varphi(x') d^4 x'. \quad (41)$$

Den Konvergenzfaktor wollen wir in den IGen immer fortlassen, wie das in der Physik allgemein bei uneigentlichen Integralen über periodische

Funktionen üblich ist. Bei der formalen Rechnung treten dann in einigen Fällen mehrdeutige Integrale auf, die aber durch explizite Berücksichtigung dieses Grenzprozesses eindeutig werden. — Diesen, hier aus rein mathematischen Gründen eingeführten Konvergenzfaktor deutet man oft als ein allmähliches („adiabatisches“) Ein- bzw. Ausschalten der Kopplungskonstanten (und damit der Wechselwirkung) für $t \rightarrow -\infty$, weil er in den IGen als Faktor der Ladung e auftritt. Nach der hier gegebenen Ableitung erscheint diese Deutung fragwürdig, denn auf der linken Seite der Gl. (37) hat der Konvergenzfaktor gar nichts mit der Ladung zu tun.

a) Nehmen wir das äußere Feld zeitlich konstant an, so geht die homogene IG (41) bei einem zeitperiodischen Ansatz:

$$\varphi(x) = \varphi(\vec{x}) e^{-iEt}$$

in die zeitunabhängige Eigenwert-IG über, deren Lösungen zu den gebundenen Teilchen gehören.

Dagegen entsteht durch diesen zeitperiodischen Ansatz aus der inhomogenen IG die bekannte, zeitunabhängige inhomogene IG für Streuprobleme, deren Lösung man prinzipiell durch die allerdings oft nicht rasch genug konvergierende Iteration nach dem inhomogenen Glied, d. h. die Neumannsche Reihe, erhalten kann. (Zur Lösung mit Kugelwellen s. z. B. Jost und Pais²⁰.)

Für die Wellenfunktionen der renormierten Quantenfeldtheorie erhalten wir ebenfalls homogene und inhomogene IGen, von denen die ersten den gebundenen Teilchen (bzw. einlaufenden Wellenpaketen), die zweiten den Streu- und gemischten Problemen entsprechen.

Stillschweigend wurde hier vorausgesetzt, daß das kontinuierliche Spektrum der Dirac-Gleichung mit äußerem Feld mit dem der Dirac-Gleichung ohne äußeres Feld übereinstimmt. Diese Forderung sollte in jeder physikalisch sinnvollen Theorie erfüllt sein, denn man kann durch eine Transformation in die Wechselwirkungsdarstellung zeigen, daß die Iteration der Gleichung nach φ_{in} zu divergenten „Massenrenormierungsgliedern“ führt, wenn die beiden kontinuierlichen Spektren nicht übereinstimmen.

b) Sei $A^e(x)$ zeitabhängig. Dann ist die Energie des Teilchens keine Erhaltungsgröße mehr, sondern das äußere Feld kann Energie aufnehmen und abgeben. Dadurch gibt es eventuell Übergänge von freien Teilchen zu gebundenen und umgekehrt.

²⁰ R. Jost u. A. Pais, Physic. Rev. **82**, 840 [1951].

In vielen Fällen hat es jetzt keinen Sinn mehr, die IGen mit unendlichen Integrationsgrenzen zu benutzen; denn man will die Veränderung eines Zustandes in endlichen Zeiträumen wissen, nicht nur sein asymptotisches Verhalten. Das Problem ist dabei: Welche Funktion entspricht einem zu einer bestimmten Zeit vorgegebenen physikalischen Zustand? — Wir wollen annehmen, daß nur ein kleiner Teil des äußeren Feldes, den man als Störung betrachten kann, sich zeitlich ändert. In einem solchen Feld wird es dann Streuzustände und quasistationäre gebundene Zustände $\sim e^{-iEt - \frac{\gamma}{2}t}$ mit $|E| < m$ geben, wobei γ die sekundliche Wahrscheinlichkeit angibt, mit der ein gebundenes Teilchen wieder frei wird. Um bestimmte physikalische Anfangszustände festlegen zu können, wird man das zeitabhängige äußere Feld zunächst fortlassen und nach a) für den Ansatz $\varphi(x) = \varphi(\vec{x}) e^{-iEt}$ die Eigenfunktionen $\varphi_n(\vec{x})$ bestimmen, die zu den verschiedenen Energieniveaus gehören. Bei Berücksichtigung des gesamten äußeren Feldes wird man dann als Anfangswert zur Zeit t_1 solch eine Eigenfunktion (für gebundene Teilchen) oder ein Wellenpaket (für Streuprobleme) benutzen und mit Hilfe der DG (36) die Funktion $\varphi(x)$ bestimmen. Dies $\varphi(x)$ wird zu späteren Zeiten nach dem vollständigen System der ungestörten Eigenfunktionen entwickelt, und die Absolutquadrate der Entwicklungskoeffizienten geben die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten physikalischen Zustand anzutreffen. Für gebundene Teilchen erhält man so bekanntermaßen die Übergangswahrscheinlichkeiten in andere Zustände.

Die Lösung $\varphi(x)$ der inhomogenen IG kann nicht mehr durch die Entwicklung nach der Kopplungskonstanten (Neumannsche Reihe) gewonnen werden, denn diese Entwicklung ist für die in der Lösung enthaltenen gebundenen Zustände nicht konvergent. (Man betrachte z. B. die Entwicklung der Lösung des Wasserstoffgrundzustandes

$$\sim e^{-ar} = 1 - \alpha r + \frac{\alpha^2 r^2}{2} - + \dots$$

für große r , bzw. dieselbe im Impulsraum

$$\sim \frac{1}{p^4 \left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2}\right)^2} = \frac{1}{p^4} \left\{ 1 - 2 \frac{\alpha^2}{p^2} + \dots \right\}$$

für kleine p .)

Die Situation in der Quantenfeldtheorie ist ganz ähnlich: beim Zusammenstoß von freien Teilchen können gebundene entstehen, die entweder stabil sind oder mit einer bestimmten sekundlichen Zer-

fallswahrscheinlichkeit (= 1/Lebensdauer) in andere Teilchen übergehen. Man wird auch hier versuchen, die Wechselwirkung so umzuschreiben, daß man mit einem Teil zunächst die Energie von gebundenen Teilchen bestimmt, während man den Teil, welcher den Zerfall dieses Teilchens bewirkt, als Störung behandelt. Das hat natürlich nur dann einen Sinn, wenn die Zerfallskonstante $\gamma \ll |E|$ ist, d. h. wenn der Zustand noch quasistationär genannt werden kann. (Genaueres s. ⁹.)

2. Die Integralgleichungen der Quantenfeldtheorie

Ebenso wie für ein Teilchen folgen auch für die allgemeinen Wellenfunktionen die IGen bezüglich der verschiedenen Teilchenkoordinaten aus den DGen des Kap. III. Da wir aus dem vorigen Abschnitt die Wirkung des einzuführenden Konvergenzfaktors $e^{-\varepsilon|t|}$ auf die inhomogenen Glieder der IGen kennen, dürfen wir ihn hier in der formalen Rechnung fortlassen. — Wir benutzen jetzt die von Feynman zuerst angewandte Art der IGen, indem wir annehmen, daß die freien Teilchen positiver Energie für $t = -\infty$ und diejenigen negativer Energie für $t = +\infty$ vorgegeben werden. (Die Zahl der Teilchen negativer Energie soll natürlich immer gleich Null sein.) Wir erhalten so IGen, in denen nicht die retardierten oder avancierten, sondern die + Funktionen auftreten. Wie Feynman gezeigt hat, haben diese Gleichungen den Vorteil, daß eine große Zahl virtueller Prozesse schon durch die + Funktionen mitberücksichtigt wird. Für uns ist diese Form der IGen aber auch nötig, denn nur so kann man das inhomogene Glied einer solchen Gleichung wirklich angeben. Ein Beispiel möge dies erläutern:

Für die Funktion $\sigma(x|y|)$ erhält man aus der DG bezüglich y die IG in der Form:

$$\begin{aligned} \sigma(x|y|) &= \frac{1}{i} \oint S_+(y, y') \beta d^3 y' \sigma(x|y'|) \\ &+ \int S_+(y, y') \gamma'_5 \{ \sigma(xy'|y'|) + \sigma(x'y''|y'|) \} d^4 y'. \end{aligned} \quad (42)$$

Das Oberflächenintegral geht dabei über die Flächen $t = \pm \infty$; dieses inhomogene Glied der IG kann man umformen, wenn man berücksichtigt:

$$S_+(y, y') = \begin{cases} -S^{(+)}(y, y') \\ +S^{(-)}(y, y') \end{cases} \quad \text{für } \begin{cases} t_y > t_{y'} \\ t_y < t_{y'} \end{cases} \text{ und}$$

$$\sigma(x|y|) = \tau(x|y|). \quad (43)$$

Man erhält dafür:

$$\begin{aligned} i \int_{t_{y'} = -\infty}^{t_{y'} = +\infty} S^{(+)}(y, y') \beta d^3 y' \tau(x|y'|) \\ + i \int_{t_{y'} = +\infty} S^{(-)}(y, y') \beta d^3 y' \tau(x|y'|) \\ = (\Psi'_H, A_H(x) \psi_{\text{in}}^{(+)}(y) \Psi_H) \\ + (\Psi'_H, \psi_{\text{out}}^{(-)}(y) A_H(x) \Psi_H). \end{aligned} \quad (44)$$

Durch Benutzung der T -Produkte und der Feynmanschen Integration ist also erreicht worden, daß automatisch der Erzeugungsoperator $\psi_{\text{out}}^{(-)}$ links steht (und mit dem Vakuum effektiv Null gibt), während der Vernichtungsoperator $\psi_{\text{in}}^{(+)}$ ganz nach rechts geht und aus dem Zustand Ψ_H ein einlaufendes Streuteilchen der Wellenfunktion $\chi(y)$ herauslöst bzw. 0 ergibt, wenn kein solches vorhanden ist. Im ganzen erhalten wir die IG:

$$\begin{aligned} \sigma(x|y|) &= \sigma(x||) \chi(y) \\ &+ \int S_+(y, y') \gamma'_5 \{ \sigma(xy'|y'|) + \sigma(x'y''|y'|) \} d^4 y'. \end{aligned} \quad (45)$$

Die im inhomogenen Glied stehende Wellenfunktion $\sigma(x||)$ hat natürlich ein einlaufendes Streuteilchen der Wellenfunktion χ weniger. Bezüglich der Koordinate x folgt analog:

$$\begin{aligned} \sigma(x|y|) &= A(x) \sigma(|y|) \\ &+ \int \Delta_+(x - x') C^* \gamma'_5 \{ \sigma(|yx'|x') + \sigma(|\overline{yx}|x'') \} d^4 x'. \end{aligned} \quad (45a)$$

Die allgemeinen IGen haben dieselbe Form: Rechts erscheint unter dem Integral eine S_+ bzw. Δ_+ Funktion, und dahinter steht jeweils die ganze rechte Seite der zugehörigen DG. In dem inhomogenen Glied entwickelt man σ nach den τ : Alle Glieder, in denen eine Δ_+ oder S_+ Funktion die Integrationskoordinate enthält, fallen fort (wegen der Orthogonalität von $S^{(+)}$ und $S^{(-)}$ bzw. $\Delta^{(+)}$ und $\Delta^{(-)}$ Funktionen). Man erhält daher als inhomogenes Glied für Mesonen (Integration nach x_i)

$$\sum_{s=1}^{l'} A_s(x_i) \sigma(x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_l | y_1 \dots | z_1 \dots). \quad (46)$$

Dabei ist l' die Zahl der in Ψ_H enthaltenen einlaufenden freien Mesonen und die A_s sind ihre Wellenfunktionen. Ebenso für Nukleonen:

$$\begin{aligned} (-1)^{m-i} \sum_{s=1}^{m'} (-1)^s \chi_s(y_i) \\ \cdot \sigma(x_1 \dots | y_1 \dots y_{i-1} y_{i+1} \dots y_m | z_1 \dots). \end{aligned} \quad (46a)$$

Das Vorzeichen \pm vor dem ganzen Ausdruck ist das Vorzeichen der Permutation, die nötig war, um im T -Produkt $\psi_{\text{in}}^{(+)}(y_i)$ ganz nach rechts zu bringen. Genau so natürlich für die Antiteilchen.

Für ein gebundenes Teilchen (bzw. in einer unrenormierten Theorie für alle Probleme) sind die IGen aller Wellenfunktionen homogen.

Man sieht an den Integralgleichungen, daß die bei Berechnung der Dysonschen S Matrix erscheinenden, in sich geschlossenen Graphenanteile (*dis-connected closed loops*) hier überhaupt nicht mehr auftreten können. Sie liefern für ein abgeschlossenes System nur einen unwesentlichen Phasenfaktor, der hier durch die spezielle Wellenfunktion

$$\varphi (||) = (\Psi_H^0, \Psi_H^0) \rightsquigarrow (\Psi_f^0, S\Psi_f^0) \quad (47)$$

gegeben ist. — Bei einem zeitlich veränderlichen äußeren Feld muß man $\varphi (||)$ allerdings berechnen, weil sein Betrag < 1 ist. Dazu genügt aber bereits die Feststellung, daß die Gesamtübergangswahrscheinlichkeit für Entstehung aller möglicher Teilchen = 1 sein muß.

Wie ist es nun möglich, für das unendliche System von IGen eine Näherung zu finden, so daß ein gegebenes physikalisches Problem mit genügender Genauigkeit berechnet werden kann. Aus der in Kap. I durchgeführten Berechnung von Übergangsamplituden mit Hilfe der Wellenfunktionen wird folgende pseudoanschauliche Beschreibungsweise nahegelegt: Die Wellenfunktion, welche l Mesonen, m Nukleonen und n Antinukleonen Koordinaten enthält, ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, daß diese Teilchen (reell oder virtuell) vorhanden sind. Sind z. B. zwei einlaufende Nukleonen kleiner Energie gegeben, so wird bei schwacher Kopplung die Wellenfunktion $\varphi (| y_1 y_2 |)$ für $t_i \rightarrow \infty$ den größten Wirkungsquerschnitt liefern, während die Erzeugungswahrscheinlichkeit anderer Teilchen gering ist. Man wird darum annehmen, daß $\varphi (| y_1 y_2 |)$ auch für endliche Zeiten besonders groß ist. Ist ein gebundenes Teilchen — z. B. das Deuteron — gegeben, dessen Ruhenergie in der Nähe der Ruhenergie einer bestimmten Zahl von freien Teilchen liegt (Nukleonenzahl ist fest vorgegeben!), so wird ebenfalls die Wellenfunktion, welche gerade diese Teilchen als Koordinaten enthält, den größten Beitrag liefern. Man wird erwarten, daß die Wellenfunktionen um so kleiner werden, je mehr weitere Koordinaten sie enthalten, denn z. B. gibt $\varphi (x | y_1 y_2 |)$ die Möglichkeit des virtuellen Austausches von einem Meson an, $\varphi (x_1 x_2 | y_1 y_2 |)$ die von zwei Mesonen usw. und die Wahrscheinlichkeit für einen Austausch von immer mehr Mesonen (bzw. Erzeugung von Nukleonenpaaren) wird immer kleiner werden. Aus den IGen folgt, daß die einfachsten Wellenfunktionen

mit denen steigender Koordinatenzahl durch Integraloperatoren gekoppelt sind, die eine steigende Potenz des Kopplungsparameters enthalten. Die pseudoanschauliche Beschreibung ist also identisch mit einer Entwicklung der Wechselwirkung nach der Kopplungskonstanten. Ist $g^2 \ll 1$, so wird diese Näherung sicher gute Erfolge ergeben, z. B. in der Quantenelektrodynamik. Aber auch wenn die Kopplungskonstante größer ist, kann es sein, daß gewisse Probleme (z. B. das Deuteron) durch eine solche Näherung noch gut beschrieben werden. (Vgl. Levy²¹; die Nukleonen müssen nur genügend Abstand voneinander haben.) Wenn die wechselwirkenden Teilchen sich aber sehr nahe kommen, wie z. B. beim Zusammenstoß mit großen Energien, so hat eine solche Näherung gar keinen Sinn mehr, denn während der Wechselwirkung ist eine statistische Mischung von allen möglichen virtuellen Teilchen vorhanden, die dann zur Emission vieler Mesonen oder gar Nukleonenpaare führen kann.

Um eine näherungsweise Lösung eines physikalischen Problems zu bestimmen, kann man entweder versuchen, den Satz von IGen bei einer Wellenfunktion mit genügend viel Koordinaten abzubrechen und das übrigbleibende endliche System von IGen simultan zu lösen; oder man stellt, ähnlich wie Levy²¹, für die einfachste Wellenfunktion eine einzige IG her, indem man die IGen der höheren Wellenfunktionen nach dieser einen iteriert und das Ergebnis in die erste IG einsetzt. Dies zweite Verfahren führt für 2 Fermi-Teilchen zur Salpeter-Bethe Gleichung⁹, für mehr Teilchen zu entsprechenden Mehrteilchengleichungen, aus denen sich Mehrkörperpotentiale berechnen lassen. — Da eine Iteration schon bei der Einteilchengleichung für gebundene Teilchen zu divergenten Ausdrücken führt, wird man auch den uniterierten IGen der einzelnen Wellenfunktionen mehr Glauben schenken und bei den andern nur die niedrigsten Näherungen benutzen.

Man kann die IG für eine einzige Wellenfunktion auch aus der Wechselwirkungsdarstellung herleiten. Dazu bestimmt man die IG für ein reines Streuproblem (einlaufende freie Teilchen) und erhält die entsprechende IG für ein gebundenes Teilchen durch Fortlassen des inhomogenen Gliedes, wie aus dem Vorangegangenen sofort einleuchtet. — Benutzt man den Operatorzusammenhang:

$$O_H(x) = U(0, t) O_w(x) U(t, 0)$$

²¹ M. M. Levy, Physic. Rev. 88, 725 [1952] u. vorhergehende Arbeiten.

so wird mit (8) und (10) für freie einlaufende Teilchen:

$$\begin{aligned} \sigma(x \dots | y \dots | z \dots) &= (\Psi_f^0, U(\infty, 0) : A_H(x) \dots \psi_H(y) \dots \psi'_H(z) \dots \\ &\quad U(0, -\infty) \Psi_f) \\ &= (\Psi_f^0, T \{ : A_w(x) \dots \psi_w(y) \dots \psi'_w(z) : \\ &\quad U(\infty, -\infty) \} \Psi_f). \quad (48) \end{aligned}$$

Dabei ist $U(\infty, -\infty) = T \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} H_w^1(x) dx \right\}$;

der Zeitordnungsoperator T soll nach Entwicklung der e -Funktion vor allen Operatoren stehen; die Doppelpunkte heißen jetzt, daß Kontraktionen für die zwischen ihnen stehenden Operatoren verboten sind. Die Ausrechnung und Umformung in eine IG erfolgt nun genau wie bei Gell-Mann und Low⁷ am einfachsten mittels der Wickschen Regeln. Man kann so z. B. auch die IG für das Positronium ableiten⁹.

V. Aufbau des Hilbert-Raumes für die Quantenfeldtheorie wechselwirkender Teilchen

Ebenso wie für die Quantenfeldtheorie freier Teilchen möchte man auch für diejenige mit Wechselwirkung ein orthonormiertes und vollständiges System von Hilbert-Vektoren konstruieren, wobei jedem Vektor eine physikalische Bedeutung kommt. Dazu führt man den Hilbert-Vektor des Vakuums ein und versucht, geeignete Operatoren zu finden, die aus diesem Vakuum das gesuchte System von Vektoren erzeugen.

$$\Psi_H^S = (l! m! n!)^{-\frac{1}{2}} \int : A_{in}(x) \dots \psi_{in}(y) \dots \psi'_{in}(z) : i \partial_{t x_1} d^3 x_1 \dots \beta d^3 y_1 \dots \beta d^3 z_1 \dots \cdot \chi(x \dots | y \dots | z \dots) \Psi_H^0. \quad (52)$$

Der Zustand ist auf 1 normiert, wenn χ nur positive Frequenzen enthält und auf die übliche Weise auf 1 normiert ist.

Im Gegensatz zum System der Freien-Teilchen-Vektoren Ψ_f ist das der Ψ_H^S nicht mehr vollständig, denn allein aus physikalischen Gründen muß es Zustände Ψ_H^g geben, die nur einlaufende gebundene Teilchen beschreiben. (Mathematisch würde sich die Existenz solcher Zustände dadurch zeigen, daß einige der eingeführten Operatoren einen Zustand Ψ_H^s in einen anderen Zustand verwandeln, der nicht mehr ganz im Raum der Ψ_H^s drin liegt.) Daraus,

Das Vakuum wird als der Eigenzustand kleinster (Ruh-) Energie definiert, wir wollen sie gleich Null annehmen (formal läßt sich das schlimmstenfalls durch Abziehen einer unendlichen Konstante vom Hamilton-Operator erreichen):

$$P^v \Psi_H^0 = 0. \quad (49)$$

Die Feldoperatoren $O_H(x)$ kann man nicht mehr relativistisch invariant nach positiven und negativen Frequenzen zerlegen, wohl aber in 3 Teile:

$$O_H = O_H^{(+)} + O_H^z + O_H^{(-)}, \quad z \not\propto z \quad (50)$$

die eine invariante Trennung der 3 Impulsraumbereiche bedeuten. Aus ihren Matrixelementen folgt wegen (49)

$$O_H^{(+)} \Psi_H^0 = 0, \quad O_H^z \Psi_H^0 = 0. \quad (51)$$

Mit den „Erzeugungsoperatoren“ $O_H^{(-)}$ kann man aber nichts anfangen, weil ihre physikalische Bedeutung nicht bekannt ist. (Man kennt nicht einmal ihre Vertauschungsrelationen zu gleichen Zeiten: Diese sind keine δ -Funktionen, sondern selbst wieder Operatoren.) Statt der Operatoren O_H benutzen wir daher zunächst die Operatoren $O_{in}(x)$, denn ihre Vertauschungsrelationen kennt man, und wir haben schon in Kap. I, 2 gesehen, wie man mittels der Operatoren $O_{in}^{(-)}$ die „Heisenberg-Streuzustände“ aus dem Vakuum aufbauen kann. Ganz allgemein wird ein solcher Zustand, der nur einlaufende freie Teilchen beschreibt, erhalten, indem man in der Normierung der Wellenfunktionen freier Teilchen χ die eine Wellenfunktion durch das entsprechende Wicksche S -Produkt der O_{in} Operatoren ersetzt und das Ganze auf das Heisenberg-Vakuum wirken läßt:

$$O_{in}^{(+)}(x) \Psi_H^g = 0, \quad (53)$$

und wenn umgekehrt diese Gleichung für gebundene Teilchen gefordert wird, folgen die homogenen IGen. (Man kann sich den Unterschied zwischen den Ψ_f und den Ψ_H^s auch an der Einteilchen-Gleichung klar machen: Die Vektoren Ψ_H^s entsprechen dort denjenigen Lösungen der inhomogenen IG (40), die nur einlaufende freie Teilchen beschreiben. Das System dieser Lösungen ist aber noch nicht vollständig.)

dig, da im allgemeinen auch die homogene Gl. (41) Lösungen besitzt, die orthogonal auf den anderen stehen. Also erst die Lösungen der inhomogenen und homogenen Gleichungen zusammen, d. h. die Gesamtheit von Streu- und gebundenen Zuständen ergibt ein vollständiges Funktionensystem. Den Vektoren Ψ_f entspricht dagegen die Gesamtheit der ebenen Wellen e^{-ipx} mit $p^2 = m^2$, die für alle Lösungen der wechselwirkungsfreien Dirac-Gleichung ein vollständiges System bilden).

Aus jedem der auf Ψ_H^0 orthogonalen Zustände Ψ_H^g kann man mit Hilfe der Operatoren $O_{in}^{(-)}$ wieder einen Unterraum Ψ_H^{sg} bilden, dessen Vektoren auf allen Ψ_H^s orthogonal stehen. Physikalisch bedeutet solch ein Zustand, daß zugleich gebundene und freie Teilchen von $t = -\infty$ her einlaufen. Die Gesamtheit aller dieser Vektoren wird ein vollständiges System in dem hier benötigten Hilbert-Raum bilden. Läßt man die Kopplungskonstante $\rightarrow 0$ gehen, so zerfällt der ganze Hilbert-Raum in invariante Unterräume für freie Teilchen; denn dann fallen die Operatoren O_H mit den O_{in} zusammen, so daß die Matrixelemente von O_H für Vektoren verschwinden, die zu verschiedenen Unterräumen gebundener Teilchen $\Psi_H^{g,s}$ und $\Psi_H^{g,s}$ (bzw. Ψ_H^s) gehören.

Wir haben die Zustände mit gebundenen einlaufenden Teilchen hier formal eingeführt, ohne sie mit Hilfe von Operatoren aus dem Vakuum zu erzeugen. Diese Erzeugung ist möglich, wenn man die Orthonormierung der Wellenfunktionen und damit die Vollständigkeitsrelation in dem allgemeinen Hilbert-Raum kennt. Daraus folgt nämlich, daß man den Heisenberg-Vektor für einen gebundenen, durch die Wellenfunktionen φ beschriebenen Zustand erhält, indem man, ähnlich wie in (52), in der Normierung der φ jeweils eine der beiden Wellenfunktionen durch das entsprechende S -Produkt von Heisenberg-Operatoren ersetzt und den erhaltenen Operator auf das Vakuum wirken läßt.

Danken möchte ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Heisenberg, den Herren Gell-Mann und Zimmermann für zahlreiche anregende und klärende Diskussionen sowie Herrn Lehmann und Symanzik für die kritische Durchsicht der Arbeit.

Anhang

Im Text (37) wird die Berechnung von

$$J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{i} \int_{-\infty}^t e^{-\varepsilon |t-t'|} \frac{\partial}{\partial t'} S(x-x') \beta \varphi(x') d^4 x' \quad (\text{A } 1)$$

gebraucht. Benutzen wir die Fourier-Darstellung von

$$S(x-x') = i \int (\mathbf{k} + m) \frac{\delta(k_0 - \omega_k) - \delta(k_0 + \omega_k)}{2\omega_k} \cdot e^{-i\mathbf{k}(x-x')} \frac{d^4 k}{(2\pi)^3}$$

und von

$$\varphi(x) = \int g(p) e^{-ipx} d^4 p,$$

so erhalten wir nach Ausführen der Integration über x' und \mathbf{k}

$$J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d k_0 d^4 p \{ k_0 + \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m \} \cdot \frac{\delta(k_0 - \omega_p) - \delta(k_0 + \omega_p)}{2\omega_p} \cdot \frac{i(p_0 - k_0)}{i(p_0 - k_0) - \varepsilon} e^{-ipx}. \quad (\text{A } 2)$$

Wenn wir $\varphi(x)$ gleich aus dem Ausdruck herausziehen, wird

$$J = \varphi(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{\varepsilon}{i(p_0 - \omega) - \varepsilon} + \frac{\varepsilon}{i(p_0 + \omega) - \varepsilon} \right\} + \frac{\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m}{2\omega} \left\{ \frac{i(p_0 - \omega)}{i(p_0 - \omega) - \varepsilon} - \frac{i(p_0 + \omega)}{i(p_0 + \omega) - \varepsilon} \right\} \right] \cdot g(p) e^{-ipx} d^4 p;$$

das zweite Glied liefert den Wert von $\varphi_{in}(x)$.

Wenn man jetzt über p_0 und $|\vec{p}|$ integriert und dann $\varepsilon \rightarrow 0$ gehen läßt, so bleibt von dem Integral nichts übrig,

1. wenn $g(p)$ nur Fourier-Koeffizienten enthält, für die $p_0 < m$ ist; denn dann ist p_0 immer $\neq \omega_p$,

2. wenn $g(p)$ auf dem Impulsraum-Hyperboloid $p^2 = m^2$ regulär ist.

Dann ergeben nämlich die punktförmigen Stellen $p_0 = \pm \omega_p$ — die einzigen Stellen, für welche die im Integral stehenden Brüche beim Grenzübergang nicht verschwinden — keinen Beitrag zum Integral (da der Wert eines Integrals unabhängig ist von der Abweichung der Funktionswerte an diskreten Punkten).

Einfache Beispiele kann man für $m = 0$ durchrechnen; dabei sieht man auch, daß in $g(p)$ vorhandene Pole in einigen Fällen einen Beitrag liefern.

3. Sei für ein Streuproblem, wie im Text angegeben,

$$\varphi(x) = \varphi_{in}(x) + f(x).$$

Setzt man die auf dem Massenhyperboloid δ -funktionsartig singuläre Funktion $\varphi_{in}(x)$ in das Integral ein, so erhält man nach Integration und Ausführen des Grenzübergangs wieder φ_{in} . (Man beachte bei der Rechnung, daß φ_{in} der freien Dirac-Gleichung genügt.) Man erhält also die übliche IG für Streuprobleme, wenn man annimmt, daß die Funktion $f(x)$ in dem Integral keinen Beitrag mehr gibt.

Für die unrenormierte Quantenfeldtheorie folgt aus 2., daß alle φ_{in} entsprechenden Funktionen, die einlaufende freie Teilchen beschreiben, Null sind, d. h. die IG auch für Streuprobleme homogen. Inhomogene IGs bekommt man nur für eine Massenrenormierte Theorie.